

# **FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA: ACTIVIDADES BASADAS EN LA UTILIZACIÓN DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA**

María José González López\*, Jose Luis Lupiáñez Gómez

Dpto. Matemáticas Estadística y Computación

Universidad de Cantabria

Av. Los Castros s/n

39071 Santander

Tno.: 942 20 15 24

[glopez@matesco.unican.es](mailto:glopez@matesco.unican.es), [lupi@matesco.unican.es](mailto:lupi@matesco.unican.es)

## **Resumen**

En este artículo presentamos actividades de enseñanza para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. El objetivo es proporcionar al futuro profesor aspectos específicos de conocimiento profesional relacionados con el uso de software de geometría dinámica. Para ello, hacemos una propuesta metodológica que pretende combinar la experiencia del futuro docente en el uso de Cabri-Géomètre con algunas aportaciones teóricas más generales que sustentan la utilidad de adquirir conocimiento profesional asociado al empleo de estas tecnologías.

## **1. Tendencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**

### **Contexto general**

La investigación en formación de profesores en los últimos años viene profundizando en la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas, así como en la determinación de metodologías que permitan a los futuros docentes adquirir conocimiento profesional. Las Actas del *IV Simposio sobre Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del Area de Didáctica de la Matemática*, (Corral-Zurbano, 2000), contienen varios trabajos significativos de autores españoles que progresan a partir de referencias básicas sobre el tema (Shulman, 1986; Bromme, 1988).

Estas investigaciones están teniendo una considerable influencia en la elaboración de programas de asignaturas sobre Didáctica de la Matemática que se imparten en los planes de estudios de algunas Licenciaturas de Matemáticas. De manera general, son asignaturas situadas en los últimos cursos de la titulación, y en sus programas podemos encontrar bloques de contenido que centran su interés en temas como:

(a) teoría curricular de matemáticas,

---

\* Parcialmente subvencionado por DGESIC PB98-0713-C02-02.

- (b) teorías de la enseñanza de las matemáticas y del aprendizaje de los alumnos,
- (c) aspectos organizativos de los centros en los que se imparte secundaria, y
- (d) conocimiento didáctico de los contenidos matemáticos de la etapa secundaria.

Estos contenidos están contemplados desde la perspectiva de la integración del conocimiento en la práctica, para lo cual se presentan metodologías que llevan al alumno a reflexionar sobre problemas profesionales, con el objetivo de formar docentes que sean capaces de adaptarse a las situaciones particulares (contextuales y disciplinares) que previsiblemente surgirán en la práctica docente (Llinares, 1998). Así encontramos distintas opciones metodológicas (estudio de casos, diseño y análisis de unidades didácticas, resolución de problemas profesionales específicos, etc.), que conjuntamente forman un escenario completo del que elegir una opción para cada contexto y contenido particular.

### **Incorporación de las nuevas tecnologías**

Respecto de la consideración de nuevas tecnologías en este marco, entendemos que la investigación sobre incorporación de software al ámbito educativo aún no ha contemplado en profundidad los aspectos relacionados con la formación inicial de profesores de matemáticas. Tampoco conocemos trabajos de investigación que particularicen las características de las componentes del conocimiento profesional al uso explícito de las nuevas tecnologías y, sin embargo, al igual que Gavilán y Barroso (1999), pensamos que no son recursos simples sino que su consideración afecta a la caracterización de algunas de dichas componentes y a los procesos de adquisición de conocimiento por parte del futuro profesor. Así, estimamos necesario adaptar a este ámbito los planteamientos teóricos y metodológicos de la formación inicial.

Partiendo de que el eje primordial en torno al cual gira la utilidad de las nuevas tecnologías es el estudiante y que el profesor actúa como guía de su aprendizaje, un paso relevante en la formación del profesor es que posea afianzados conocimientos acerca del potencial de estos instrumentos para promover y desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, las distintas formas de implementarlos en su práctica docente, las consecuencias pedagógicas que se revierten, las ventajas y limitaciones de su empleo, etc. Ahora bien, como no se puede esperar que tantas y tan complejas tareas puedan adquirirse de forma espontánea, es necesario adecuar previamente la formación didáctica del profesor y realizar importantes ajustes en el currículo. Por ello consideramos que una adecuada estructuración de su formación favorece la consecución de tal objetivo, toda vez que en el esquema actual podemos encontrar importantes carencias:

Por un lado, puede observarse que la incorporación de nuevas tecnologías al caso de la formación de Licenciados de Matemáticas se centra en contenidos de informática básica y programación, y en el uso de paquetes específicos de software relacionados con contenidos concretos. Pero estos conocimientos técnicos han de sufrir una modificación importante si se pretende que se transformen en conocimiento útil para el profesor de matemáticas de secundaria. Es ocioso decir que, por ejemplo, resolver actividades geométricas en un entorno de geometría dinámica no proporciona al futuro profesor preparación suficiente para afrontar la enseñanza de la geometría con este tipo de medios.

Por otro lado, en el campo de actuación de los profesores universitarios la situación es muy similar. Desde el punto de vista metodológico, algunas universidades (como la de Cantabria) están tratando de incorporar el uso de tecnología a la actividad docente a

nivel global, para lo cual han puesto a disposición del profesorado universitario los medios materiales necesarios para utilizar la tecnología de la información y comunicación que Internet ofrece: el correo electrónico, la publicación de apuntes y actividades en la red, incluso la evaluación “a distancia”. De nuevo estos planteamientos globales no están explícitamente ligados a ninguna propuesta pedagógica ni a ningún contenido concretos. Todos los profesores universitarios están invitados a incorporarlos a su metodología particular lo que, en las condiciones actuales, supone un experimento que necesitará un tiempo para la adaptación personal y la evaluación de resultados.

## **2. Marco para la formación inicial de profesores de matemáticas en el uso de software de geometría dinámica**

Una vez planteado este panorama general, en este trabajo presentamos algunas actividades para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria basadas en el uso de software de geometría dinámica para la enseñanza de la geometría. Enmarcamos estas actividades en el programa de la asignatura Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria que forma parte del nuevo Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Cantabria como asignatura optativa.

El planteamiento general que da cabida a estas actividades está basado en el marco aludido en la sección anterior, que enfoca la formación inicial de profesores de matemáticas hacia la adquisición de conocimiento profesional, con los objetivos de dotar a los alumnos de herramientas que fomenten su autonomía profesional y de presentarles aspectos que permitan ampliar su visión formal del conocimiento matemático.

Consideramos que adquirir conocimiento profesional en el ámbito de las nuevas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento del propio recurso a nivel técnico como en el análisis de las consecuencias de su uso en la enseñanza. Por ello propondremos actividades que combinen estas dos facetas:

- por una parte, proponiendo a los alumnos tareas técnicas a realizar con el software de geometría dinámica, que servirán para profundizar en el conocimiento técnico del mismo y como apoyo para reflexionar sobre la materia que se enseña, su naturaleza, los condicionantes de su implementación en un soporte computacional, los distintos modos de representarla, etc.
- por otro lado, aportando documentos teóricos para que los alumnos analicen cuestiones relacionadas con el aprendizaje y la planificación de actividades de enseñanza, teniendo como referencia su propia experiencia en el uso del software y la actuación del profesor en dicho contexto.

Aportamos así un importante factor de contextualización a la construcción de conocimiento profesional, como es la utilización de un recurso particular (el software de geometría dinámica), entendiendo que la adquisición de conocimiento profesional está fuertemente vinculada al contexto (Llinares, 1994), en particular, al tipo de situaciones peculiares que implica el uso de software. También pretendemos con ello incidir en las fases de comprensión, transformación e instrucción, que forman parte del razonamiento pedagógico (Shulman, 1986) en que tratamos de introducir a los futuros profesores de matemáticas, con el fin de que inicien la transformación de los contenidos matemáticos formales que conocen en conocimiento para enseñar.

A continuación ejemplificamos esta propuesta mediante tres actividades de enseñanza para los futuros profesores. Presentamos cada actividad detallando:

- el fundamento (donde aportamos indicaciones que nosotros consideramos justifican la pertinencia la actividad en la formación del futuro profesor),
- los objetivos que se pretende consigan los alumnos,
- los contenidos tratados en la actividad y
- las actividades a realizar por los alumnos y la metodología (con carácter general, habrá una puesta en común colectiva de las conclusiones más significativas que se deriven del trabajo individual o en pequeño grupo realizado por los alumnos).

En lo que sigue denominaremos “alumnos” a los futuros profesores de matemáticas de secundaria y “estudiantes” a los alumnos de secundaria.

### 3. Actividades

#### Conocimientos previos

Consideramos que, en el momento de proponer las siguientes actividades, ya se han impartido contenidos relativos a los fines de la educación matemática, elementos de un currículo de matemáticas, fundamentos del currículo actual de secundaria según los documentos oficiales, importancia concedida a las nuevas tecnologías en dichos documentos, conocimientos teóricos generales sobre teorías del aprendizaje de las matemáticas y diferentes metodologías de enseñanza de las matemáticas. Desde el punto de vista técnico, partimos de que los alumnos de la Licenciatura tienen un conocimiento formal suficiente de los contenidos geométricos que se tratan en las actividades, y que tienen soltura en el manejo operativo del software.

#### Actividad 1: Representación dinámica de conceptos geométricos.

**Fundamento:** La representación de una construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica tiene dos facetas distintas:

- 1) la representación gráfica de objetos geométricos en la pantalla del ordenador,
- 2) el almacenamiento de las propiedades geométricas que dichos objetos poseen.

La primera de ellas, en cuanto a representación gráfica, puede llevarse a cabo en otros contextos: por ejemplo, con lápiz y papel (de forma estática) o grabando a modo de película una secuencia de dibujos (si queremos añadir movimiento). Sin embargo, la segunda faceta es específica de los ambientes computacionales de geometría dinámica y representa una de las características más significativas de estos ambientes: gracias a ella podemos enmarcar las representaciones computacionales de la geometría dinámica en lo que (Lupiáñez y Moreno, 2001) denominan *representaciones ejecutables*, en el sentido de que podemos ver los objetos matemáticos como manipulables y actuar sobre ellos.

Esta cualidad se manifiesta por el *modo arrastre* (dragging) que poseen los sistemas de geometría dinámica y que les confieren la cualidad de ser dinámicos. Es la responsable de que se aumenten las posibilidades de actuación del usuario sobre los objetos geométricos y, en consecuencia, de que se modifiquen las condiciones de las situaciones específicas de enseñanza respecto de otros contextos más tradicionales.

Hölzl (1996) analiza la naturaleza del modo arrastre y su posible implicación en las concepciones resultantes en los estudiantes, concluyendo que el arrastre, desde un punto de vista técnico:

- enfatiza la jerarquía de los objetos geométricos,
- pone de manifiesto las relaciones entre dibujo y figura,
- altera el “carácter relacional” de los objetos geométricos, distinguiendo objetos que, desde un punto de vista teórico, son indistinguibles,

Y desde un punto de vista educativo:

- sugiere nuevos estilos de razonamiento,
- favorece la aparición de estrategias dinámicas de resolución de problemas, potenciando el heurístico de Polya “variar los datos del problema”,
- potencia la aparición de un nuevo lenguaje entre los estudiantes para comunicar experiencias geométricas, basado en el uso de verbos activos relacionados con el movimiento.
- demanda nuevas habilidades a los estudiantes, relacionadas con las “meta-actividades” de controlar los parámetros que intervienen en un experimento y ser capaces de interpretar los resultados.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y no ocurre sin una intervención específica. En este sentido, el uso de software de geometría dinámica podría sugerir la idea errónea de que mostrar un dibujo y “moverlo” es suficiente para que el estudiante deduzca una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento (Laborde, 1998; Hillel y otros, 1989). Pero la simple sustitución de la regla y el compás tradicionales por comandos en un sistema computacional, por más que este introduzca algunas variantes, no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje de la geometría (Recio, 1999). Así es fundamental diseñar o seleccionar actividades para los estudiantes encaminadas a relacionar información geométrica teórica con información observada en un dibujo que se mueve.

**Objetivos:** Conocer las peculiaridades de las representaciones de conceptos geométricos en entornos computacionales de geometría dinámica. Percibir las novedades que este tipo de representación aporta sobre las herramientas clásicas (lápiz y papel). Analizar las implicaciones de la componente dinámica de la representación en el aprendizaje.

**Contenidos:** Representaciones externas de conceptos geométricos en soporte computacional. Representaciones ejecutables. Diferencias entre dibujo y figura. Diferencias entre geometría y “Cabri-geometría”. Aportaciones de la componente dinámica de la representación al aprendizaje de aspectos geométricos.

**Actividades a realizar por los alumnos y Metodología:**

1. *Tarea inicial, a desarrollar en grupos pequeños:* anotar las distintas formas que conocen para representar algunos conceptos geométricos (p. ej. un polígono, una parábola, la mediatriz de un segmento) y reflexionar sobre las representaciones que llevamos a cabo para comunicar propiedades geométricas (p. ej. ¿qué representaciones

utilizamos para comunicar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio?).

2. *Sobre el ordenador, por parejas*: Incorporar posibles nuevas representaciones que el sistema Cabri-Géomètre puede aportar para los mismos objetos y relacionarlas con las anteriores.

3. *Tarea individual*: Estudiar textos o apuntes que contengan elementos teóricos sobre representaciones externas, representaciones en geometría dinámica y efectos de las mismas en el aprendizaje: Laborde (1998), Straesser & Capponi (1991), Hitt (1994), Hölzl (1996) o Goldenberg & Cuoco (1998).

3. *Sobre el ordenador, por parejas*: realizar actividades para examinar distintas representaciones de una construcción geométrica que Cabri-Géomètre ofrece, valorando las opciones que nos permiten manipularlas. Contrastar dichas opciones con las que ofrece el contexto de lápiz y papel. Un ejemplo de ficha para el alumno para este tipo de actividad es el siguiente:

**Representaciones de la parábola en Cabri-Géomètre**: Efectúa construcciones de una parábola como las siguientes: lugar geométrico de puntos que equidistan de una recta (directriz) y un punto (foco), relación de dependencia entre dos variables, cónica que pasa por cinco puntos, envolvente de un haz de rectas, por deformación de otra cónica, etc.

¿Qué relaciones geométricas ha almacenado el sistema en cada caso?

¿Qué manipulaciones permite cada representación?

¿Cuáles de estas representaciones pueden llevarse a cabo con papel y lápiz? ¿qué diferencias aprecias en cada caso?

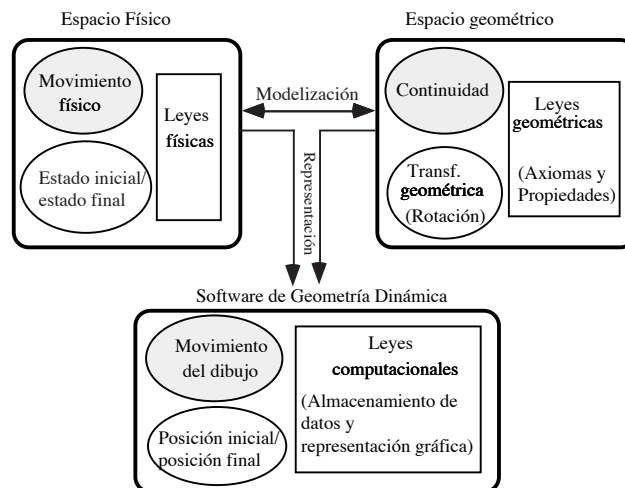
¿Alguna de las representaciones realizadas permite, por desplazamiento de elementos geométricos, dibujar todas las cónicas?

¿Consideras que estas posibilidades pueden modificar la enseñanza de las cónicas en el bachillerato?

## **Actividad 2: Simulación de mecanismos y modelos dinámicos.**

**Fundamento**: Tomando como referencia el marco de Fishbein (1993), según el cual los objetos geométricos tienen un carácter “figural”, consideramos que las actividades de simulación pueden utilizarse para promover en los alumnos la construcción de determinados conocimientos geométricos, ya que requieren relacionar el funcionamiento de un mecanismo físico con propiedades y conceptos geométricos. El software de geometría dinámica tiende un puente de comunicación entre ambos aspectos, ya que permite al estudiante explorar estas relaciones mediante la manipulación de un modelo dinámico que es construido en el software mediante comandos basados en referentes teóricos. En palabras de (Damiani y otros 1999, p. 63) el dinamismo de un modelo “*enriquece la percepción y permite una construcción del saber mediante pasos sucesivos en el espacio y el tiempo a través del descubrimiento de semejanzas y la comprensión de las transformaciones realizadas*”.

Sintetizamos en el cuadro siguiente las relaciones entre los tres contextos, físico, geométrico y computacional que confluyen en las actividades de simulación de un mecanismo, y explicamos a continuación nuestro modo de interpretarlas:



Observamos que, por un lado, el software de geometría dinámica permite realizar construcciones geométricas a partir de objetos de distinta categoría, en particular se puede utilizar para **representar modelos** de diferentes mecanismos físicos. Por otro lado, el cuerpo de conocimiento que conforma la geometría dinámica puede considerarse un modelo para situaciones físicas, con distintas posibilidades de representación, en particular, mediante un dibujo construido en un ordenador.

La tarea de construcción de un mecanismo físico en el ambiente Cabri-Géomètre requiere que el usuario:

- identifique las relaciones y propiedades geométricas que son las responsables de que el mecanismo funcione; es decir, el usuario asocia al mecanismo físico un modelo geométrico,
- diseñe una estrategia de construcción teniendo en cuenta las características del material a utilizar, en este caso, el software y realice la implementación correspondiente.

Estas dos acciones no son completamente independientes entre sí, ya que el modo particular en que el software tiene implementada la teoría geométrica (los comandos disponibles) condiciona las posibilidades de elección de modelo geométrico al usuario (González-López, 2001).

Además, el hecho de que el almacenamiento de las propiedades geométricas se lleve a cabo en un soporte computacional impone una serie de reglas -en terminología de Balacheff (1994), requiere una *transposición informática* del conocimiento-, que hemos llamado leyes computacionales en el cuadro anterior, que condicionan el movimiento de los dibujos en la pantalla del ordenador. Estas reglas son las responsables de las diferencias entre el mecanismo físico y el modelo representado en el ambiente computacional. Hölzl (1996) indica que la implementación del modo arrastre en un contexto computacional implica decisiones sobre el comportamiento de los objetos geométricos cuando son movidos, de forma que pueden ocurrir fenómenos que quedan fuera del ámbito puramente geométrico. Así, cada objeto representado en un sistema de geometría dinámica tiene lo que Laborde (1999) denomina un "dominio de validez", que depende del algoritmo utilizado para definirlo, fuera del cual los hechos que ocurran pueden ser incoherentes en el contexto de la teoría geométrica.

Este análisis es una manifestación más de que el uso de un modelo y de un soporte de representación determinados tiene unos condicionantes que deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza, para tratar de depurar las limitaciones que imponen.

**Objetivos:** Contemplar el software de geometría dinámica como herramienta que permite representar el funcionamiento de mecanismos físicos. Reflexionar sobre las relaciones entre los tres ámbitos (real o físico, teórico y computacional) que intervienen en la simulación de un mecanismo en un soporte computacional. Detectar consecuencias de la “transposición informática” del conocimiento en un sistema de geometría dinámica (utilizando para ello las posibilidades del sistema para simular el funcionamiento de un mecanismo). Considerar el software de geometría dinámica como soporte que facilita la utilización de modelos dinámicos. Valorar el interés educativo de los modelos dinámicos en la enseñanza de la geometría.

**Contenidos:** Modelo y simulación. Modelización computacional del conocimiento. Dominio de validez de un objeto geométrico en un sistema de geometría dinámica. Marco teórico para realización de actividades con modelos dinámicos. Condicionantes del uso de modelos en la enseñanza de la geometría.

**Actividades a realizar por los alumnos y Metodología:**

1. *Sobre el ordenador, por parejas:* Los alumnos diseñan en Cabri-Géomètre el mecanismo articulado llamado “Rotor de Sylvester” (Figura 1)\*, que es un instrumento de dibujo que se utiliza para describir la rotación de una figura respecto de un centro de giro (B) y una amplitud (ángulo SBL) dados. El punto S describe la figura original, y L la misma figura ya rotada. Se comienza mostrando a los alumnos el “rotor” de Sylvester construido con otro material (por ejemplo, con barras de plástico duro perforadas y chinchetas). A partir de la manipulación física con este instrumento los alumnos elaboran el proceso de construcción del rotor en Cabri-Géomètre.

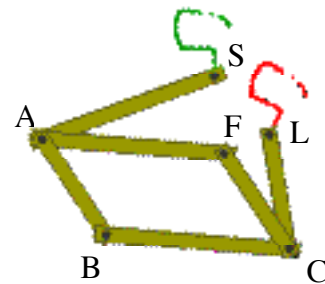


Figura 1

Una vez construido el rotor en el ambiente Cabri, para lo cual puede haber más de un proceso, se propone a los alumnos mover elementos de la construcción con el fin de producir las siguientes situaciones:

- Alejar o acercar mucho el punto S al centro de giro B, de forma que el dibujo del rotor desaparece de la pantalla. Esta perspectiva muestra una limitación compartida por el modelo físico del rotor y el modelo implementado en el sistema.
- El algoritmo implementado para construir el rotor en Cabri-Géomètre requiere copiar un ángulo dado sobre una semirrecta. La versión 1.0 de Cabri-Géomètre II incorpora una macro para realizar esta acción, que habrá sido utilizada por los alumnos en la construcción inicial. Ahora proponemos a los alumnos sustituir esta macro por otra que tienen que elaborar ellos mismos, en la que se encontrarán con las dificultades de tener que indicar al sistema un sentido de giro para el ángulo y determinar un rango de medida de ángulos (a elegir entre  $[0, \pi]$  ó  $[0, 2\pi]$ ). Dependiendo de la opción que elijan encontrarán diferencias entre el modelo físico, su representación computacional y el modelo teórico que deseaban representar. Anotarán las limitaciones que observan en el modelo computacional implementado, así como las posibles causas a las que atribuir las.
- La continuidad del movimiento es otra de las características que permiten diferenciar los modelos y representaciones utilizados. También es un concepto clave en el que se

---

\* La Figura 1 ha sido tomada de <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ20/instrumentos.htm>, realizada por M. Menna Barreto y M. Alice Gravina.



reflejan las dificultades de cada modelo para captar todos los aspectos del fenómeno que se pretende modelizar. Encontramos construcciones en las que, al mover los dibujos en la pantalla, se producen "saltos" sin sentido físico. Laborde (1999) nos recuerda que la noción de "estar próximo" en un sistema de geometría dinámica no es la misma que en topología, característica que es la responsable de la posible falta de continuidad. En el caso del rotor se propone a los alumnos que modifiquen los elementos básicos empleados en la construcción para localizar posibles discontinuidades en el rotor (que se producen cuando las longitudes de los segmentos iniciales son iguales, al deslizar el punto S sobre el centro de giro B). Los alumnos deben buscar argumentos para explicar dichos fenómenos, tratando de interpretar en un contexto físico las razones geométricas y algorítmicas que encuentren.

Se propone a los alumnos delimitar el dominio de validez del punto S en la construcción realizada del rotor, tomando como referencia las limitaciones encontradas en las tres acciones anteriores.

2. *Tarea individual*: Estudiar textos sobre las consecuencias de la modelización computacional del conocimiento (Balacheff, 1994) y sobre el interés de las actividades geométricas con modelos dinámicos para la enseñanza de la geometría (Damiani y otros, 1999).

3. *En grupos pequeños*: Elegir un contenido geométrico de secundaria y diseñar alguna actividad de simulación con software de geometría dinámica que permita tratarlo, anotando los aspectos de dicho contenido que la actividad enfatiza y los que omite, y proponiendo actividades complementarias para superar las limitaciones que se detecten.

### **Actividad 3: Demostración en geometría y software de geometría dinámica.**

**Fundamento:** El software de geometría dinámica se presenta como un modelo para la geometría euclídea. Desde el punto de vista teórico, las demostraciones en este marco siguen un proceso deductivo basado en la combinación adecuada de un sistema de reglas lógicas aplicadas a los axiomas. Sin embargo, el modelo didáctico en que se suele insertar el uso de este software en la enseñanza es de corte constructivista, basado en la exploración y en la conjetura a partir de observaciones sobre experimentos (Yábar, 1995) y, por tanto, responde mejor a un enfoque inductivo.

Este conflicto tiene como consecuencia más inmediata el que no podamos esperar que el uso de software de geometría dinámica sugiera caminos o ideas posibles para la demostración formal de un resultado observado (solamente si el resultado es falso el modo de arrastre facilita la búsqueda de contraejemplos), incluso podemos considerar que el uso de este tipo de software constituye un obstáculo para la necesidad de demostrar, entendida la demostración como convicción/verificación (De Villiers, 1998). Sin embargo la demostración tiene otras funciones en la etapa secundaria: De Villiers, en el trabajo que acabamos de citar, indica que el software de geometría dinámica es útil para la demostración entendida como explicación y descubrimiento, y muestra ejemplos de actividades que tienen el propósito de conducir a los estudiantes a descubrir y formular una conjetura, y guiarlos hacia una explicación que ilustre la función de descubrimiento de la demostración.

**Objetivos:** Conocer distintas funciones de la demostración en la geometría de secundaria. Valorar las consecuencias del uso de ambientes de geometría dinámica en los procesos de razonamiento de los estudiantes. Ser capaz de clasificar/diseñar

actividades adaptadas a las distintas funciones de la demostración en ambientes de geometría dinámica.

**Contenidos:** Funciones de la demostración en la geometría de secundaria. Actividades con software de geometría dinámica para ejemplificar dichas funciones. Los ambientes de geometría dinámica como mediadores en el desarrollo del pensamiento deductivo y como obstáculo para la necesidad de demostrar.

### Actividades a realizar por los alumnos y Metodología:

1. *Tarea individual:* Estudiar textos o apuntes que contengan reflexiones sobre el papel de la demostración en la educación secundaria, y analizar si se desarrollan o no en libros de texto, y cómo lo hacen: De Villiers (1998), Ibáñez & Ortega (1997), Lupiáñez (2000).

2. *Grupo-Clase:* A partir de sugerencias del profesor, discutir acerca de las características, la formalidad, y la utilidad educativa de algunos pasajes de razonamiento desarrollados en ambientes de geometría dinámica, tratando de poner de manifiesto las creencias de los alumnos al respecto.

3. *Sobre el ordenador, por parejas:* Analizar actividades como la siguiente:

Dada la siguiente construcción en Cabri (Figura 2; Bennet, 1997), se trata de conducir la elaboración de una justificación del Teorema de Pitágoras, con idea de profundizar en las discusiones del punto anterior. Los puntos A, B y C son móviles, y consiguen una serie de transformaciones (Figura 3) que relacionan la superficie de los diferentes cuadrados apoyados en el triángulo. En este caso, podríamos hablar de demostración como *comprobación visual*.

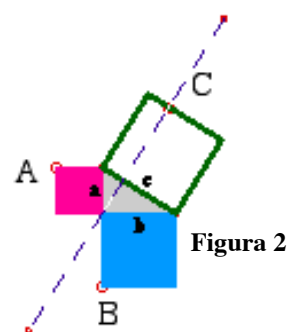


Figura 2

Basándose en sus manipulaciones sobre la construcción, los alumnos han de reflexionar a partir de cuestiones como las siguientes:

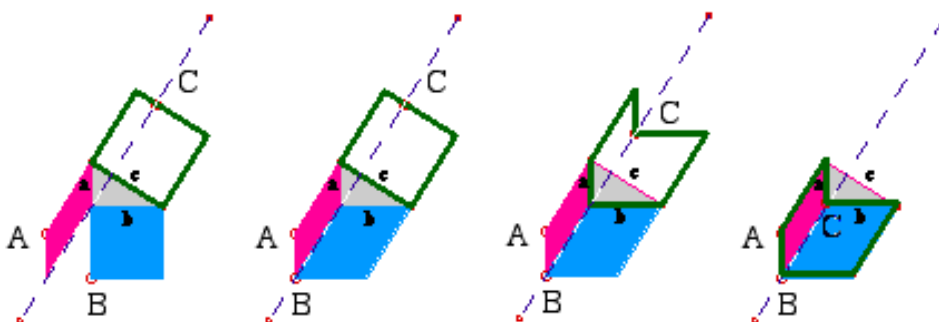


Figura 3

- ¿Cómo se ve afectada la superficie de los cuadriláteros inferiores cuando son deformados en la construcción? ¿Y la del cuadrado superior cuando se transforma en otro polígono?
- ¿Es cierto que pueden solaparse los polígonos?
- ¿Demuestra esto el Teorema de Pitágoras? Si es cierto, ¿por qué? Si no lo es ¿qué faltaría para hacerlo?

También se pueden realizar otras actividades con el mismo esquema metodológico para estudiar el papel de la demostración como *descubrimiento*, como *conjetura*, o como *explicación*.

4. *Grupo clase*: retomar la discusión iniciada en el punto 2, teniendo ahora como elementos de juicio las actividades realizadas. Contrastar las nuevas conclusiones con las creencias previas de los alumnos.

## Conclusiones

Con las actividades descritas en el documento pretendemos que los alumnos adquieran conocimiento profesional de una manera significativa, tratando de provocar situaciones en las que perciban el sentido de la instrucción didáctica que se le pretende dar, y que no se limiten a estudiar el ambiente de geometría dinámica sólo desde un punto de vista técnico. Así hemos tratado de poner de manifiesto algunas modificaciones que el software promueve sobre la forma de acceder a los contenidos matemáticos y los nuevos modos de comunicación que propicia.

Consideramos que la metodología propuesta, que combina la utilización del software con la lectura crítica de documentos teóricos y su ejemplificación mediante el análisis de actividades de secundaria en Cabri-Géomètre, permite desarrollar el espíritu crítico y la reflexión de los alumnos sobre el conocimiento formal que poseen, como primer paso para transformarlo en conocimiento útil para enseñar.

Creemos que, desde un marco más general, una formación del futuro profesorado de matemáticas de secundaria debería incluir tareas de este tipo en las que, partiendo de la sólida instrucción matemática que poseen, se fundamente de una manera precisa y coherente la necesidad de un conocimiento didáctico de los contenidos curriculares asociado al uso de recursos informáticos.

## Bibliografía

BALACHEFF, N. (1994): *Didactique et intelligence artificielle*. Recherches en Didactique des mathématiques, vol. 14, n. 1.2, pp. 9-42.

BENNET, D. (1997): *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

BROMME, R. (1988): *Conocimientos profesionales de los profesores*. Enseñanza de las Ciencias 6(1), pp. 19-29.

CORRAL, C., ZURBANO, E. (2000) (coords): *Actas del IV Simposio sobre Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del Area de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Oviedo.

DAMIANI, A.M., FACENDA, A.M., FULGENZI, P., MASI, F., NARDI, J., PATERNOSTER, F. (1999): *El uso de modelos dinámicos en la didáctica de la matemática*. Uno, 24, pp. 62-77.

FISCHBEIN, E. (1993): *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 24(2) p. 139-162.

GAVILÁN, J.M., BARROSO, R. (1.999): *El ordenador en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas: una propuesta*. Educación Matemática, Vol 11, Nº 2, pp 95-103.

- GOLDENBERG E. P., CUOCO A. A. (1998): *What is Dynamic Geometry?* In R. Lehrer, D. Chazan (Eds). *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. Lawrence Erlbaum Assoc., pp. 351-367.
- GONZÁLEZ-LÓPEZ, M.J. (2001): *Using dynamic geometry software to simulate physical motion*. Int. Journal of Computers for Mathematical Learning. (En prensa).
- HILLEL, J., KIERAN, C., GURTNER, J.-L. (1989): *Solving structured geometric tasks on the computer: the role of feedback in generating strategies*. Educational Studies in Mathematics 20, pp. 1-39.
- HITT, F. (1998): *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum*. Educación Matemática, Vol. 10, N° 2, pp. 23-45.
- HÖLZL, R. (1996): *How does dragging affect the learning of geometry*. Int. Journal of Computers for Mathematical Learning, N° 1, pp. 169-187.
- IBAÑES, M., ORTEGA, T. (1997): *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática, Vol. 9, N° 2, pp. 65-104.
- LABORDE, C. (1998): *Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría*. En L. Puig (Ed) *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*. Una empresa docente, pp. 33-48
- LABORDE, J.M. (1999): *Some issues raised by the development of implemented Dynamic Geometry as with Cabri-géomètre*. Proceedings 15<sup>th</sup> European Workshop on Computational Geometry. H. Brönnimann Ed. INRIA Sophia Antipolis, pp. 7-19.
- LLINARES, S. (1994): *El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional*. En L. A. Santaló y otros (Eds) *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Madrid: Rialp, pp. 297-336.
- LLINARES, S. (1998): *Aprender a enseñar matemáticas en la escuela secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico*. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, N° 32, pp. 117-127.
- LUPIÁÑEZ, J.L. (2000): *Concepciones de profesores en formación acerca de la validación del conocimiento matemático con el uso de tecnología*. En Hitt & Hernández (Eds.) *Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y Universitario*. Dpto. Matemática Educativa del CINVESTAV / IPN. México. pp. 113-127.
- LUPIÁÑEZ J.L., MORENO, L. (2001): *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. En Rico, L. (Ed.) *Estudios de Doctorado: Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. (En prensa).
- RECIO, T. (1999): *Compass avoidance*. Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, N° 53, pp. 59-66.
- SHULMAN L. S. (1986): *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Educational researcher 15, pp. 4-14.
- STRAESSER, R., CAPPONI, B. (1991): *Drawing - computer model - figure. Case studies in students' use of geometry-software*. Proceedings XV PME Conference, Vol. 3, pp. 302-309.

YÁBAR, J.M. (1995): *El ordenador en la enseñanza secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje*. Aula de Innovación Educativa, N° 40-41. Barcelona: Ed. Grao, pp. 33-37.

DE VILLIERS, M. (1998): *An alternative approach to proof in dynamic geometry*. En Lehrer & Chazan (Eds) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. Lawrence Erlbaum Assoc. pp. 369-393.